第９講　ちょっと困った極限

9

［A］ 関数 $f(x)=|x^2-2x|$ に対して，数列 $\{a_n\}$ が漸化式 $a_{n+1}=f(a_n)$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ を満たすとき，次の問いに答えよ．

(1) 曲線 $y=f(x)$ と直線 $y=x$ との共有点の座標を求めよ．

(2) $0<a_1<1$ ならば，数列 $\{a_n\}$ の一般項は $a_n=1-(1-a_1)^{2^{n-1}}$ で与えられることを示せ．

(3) $1\leqq a_1\leqq 1+\sqrt{3}$ のとき，グラフを利用して極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n$ を求めよ．

［B］ n を自然数とする．次の各問いに答えよ．

(1) 自然数 k は $2\leqq k\leqq n$ を満たすとする．9^k を 10 進法で表したときの桁数は，9^{k-1} の桁数と等しいか，または 1 だけ大きいことを示せ．

(2) 9^{k-1} と 9^k の桁数が等しいような $2\leqq k\leqq n$ の範囲の自然数 k の個数を a_n とする．9^n の桁数を n と a_n を用いて表せ．

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}$ を求めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第9講　ちょっと困った極限

9 関数 $f(x)=-\frac{1}{2}x^2+2x-\frac{1}{2}$ と $a_1=2$, $a_{n+1}=f(a_n)$ $(n\geqq 1)$ によって定義される数列 $\{a_n\}$ について，次の各問いに答えよ．

(1) a_3 を求めよ．

(2) $x_1<x_2<2$ のとき，$f(x_1)<f(x_2)$ が成り立つことを示せ．

(3) $n=3$, 4, $\cdots$ に対し，$a_n<1+\frac{2}{n}$ が成り立つことを示せ．

(4) $\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第9講　ちょっと困った極限

9

［A］　関数 $f(x)=|x^2-2x|$ に対して，数列 $\{a_n\}$ が漸化式 $a_{n+1}=f(a_n)$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ を満たすとき，次の問いに答えよ．

(1)　曲線 $y=f(x)$ と直線 $y=x$ との共有点の座標を求めよ．

(2)　$0<a_1<1$ ならば，数列 $\{a_n\}$ の一般項は $a_n=1-(1-a_1)^{2^{n-1}}$ で与えられることを示せ．

(3)　$1\leqq a_1\leqq 1+\sqrt{3}$ のとき，グラフを利用して極限値 $\lim_{n\to\infty}a_n$ を求めよ．

［B］　n を自然数とする．次の各問いに答えよ．

(1)　自然数 k は $2\leqq k\leqq n$ を満たすとする．9^k を10進法で表したときの桁数は，9^{k-1} の桁数と等しいか，または1だけ大きいことを示せ．

(2)　9^{k-1} と 9^k の桁数が等しいような $2\leqq k\leqq n$ の範囲の自然数 k の個数を a_n とする．9^n の桁数を n と a_n を用いて表せ．

(3)　$\lim_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{n}$ を求めよ．

【答】　［A］　(1) $(0,\ 0)$，$(1,\ 1)$，$(3,\ 3)$　(2) 略

(3) $\begin{cases} a_1=2,\ a_1=1+\sqrt{3} \text{ のとき} & \lim_{n\to\infty}a_n=0 \\ 1\leqq a_1<2,\ 2<a_1<1+\sqrt{3} \text{ のとき} & \lim_{n\to\infty}a_n=1 \end{cases}$

［B］　(1) 略　(2) $n-a_n$　(3) $\lim_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{n}=1-2\log_{10}3$

【解説】

［A］　(1)

$$|x^2-2x|=x$$

$$\iff \begin{cases} x^2-2x=x \quad \text{かつ} \quad x^2-2x\geqq 0 \\ -x^2+2x=x \quad \text{かつ} \quad x^2-2x<0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x=0,\ 3 \quad \text{かつ} \quad x\leqq 0,\ x\geqq 2 \\ x=0,\ 1 \quad \text{かつ} \quad 0<x<2 \end{cases}$$

$$\therefore\quad x=0,\ 1,\ 3$$

よって共有点の座標は

$$\mathbf{(0,\ 0),\ (1,\ 1),\ (3,\ 3)}$$

(2)　$0<a_1<1$ のとき

$$1-(1-a_1)^{2^0}=a_1$$

ここで $n\geqq 1$ のとき $a_n=1-(1-a_1)^{2^{n-1}}$ を仮定すると，

$$0<1-a_1<1 \qquad \therefore\quad 0<1-(1-a_1)^{2^{n-1}}<1$$

$$\therefore\quad 0<a_n<1$$

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

このとき

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= f(a_n) \\ &= -a_n{}^2+2a_n \\ &= -a_n(a_n-2) \\ &= -\{1-(1-a_1)^{2^{n-1}}\}\{-1-(1-a_1)^{2^{n-1}}\} \\ &= 1^2-\{(1-a_1)^{2^{n-1}}\}^2 \\ &= 1-(1-a_1)^{2^n} \end{aligned}$$

よって帰納的に

$$a_n=1-(1-a_1)^{2^{n-1}} \quad (n \geqq 1)$$

が示された.

(3)　グラフより

$a_1=2,\ 1+\sqrt{3}$ のとき

$$\lim_{n\to\infty} a_n=0$$

$1\leqq a_1<2,\ 2<a_1<1+\sqrt{3}$ のとき

$$\lim_{n\to\infty} a_n=1$$

［B］ (1)　9^{k-1} の桁数を自然数 l で表すと

$$10^{l-1}\leqq 9^{k-1}<10^l \qquad \therefore \quad 9\cdot 10^{l-1}\leqq 9^k<9\cdot 10^l$$

となるが,

$$9\cdot 10^{l-1}<10^l<9\cdot 10^l$$

であることより

$$10^{l-1}\leqq 9^k<10^l \text{ または } 10^l\leqq 9^k<10^{l+1}$$

のいずれかは成立する．よって 9^k は l 桁か $(l+1)$ 桁である.

(2)　$9^2=81>10$ より 9^{k-1}, 9^k, 9^{k+1} の３つの数字の桁数が等しくなる k は存在しない．よって 9^1, 9^2, $\cdots$, 9^n の n 個の数のうち桁数が重複しているのは a_n 個であるので 9^n の桁数は

$$\boldsymbol{n-a_n}$$

(3)　9^n の桁数が $n-a_n$ より

$$\begin{aligned} & 10^{n-a_n-1}\leqq 9^n<10^{n-a_n} \\ \iff\ & n-a_n-1\leqq n\log_{10}9<n-a_n \\ \iff\ & 1-\log_{10}9-\frac{1}{n}\leqq \frac{a_n}{n}<1-\log_{10}9 \end{aligned}$$

ここで

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\log_{10}9-\frac{1}{n}\right)=1-\log_{10}9=1-2\log_{10}3$$

より

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=1-2\log_{10}3$$

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第９講　ちょっと困った極限

9　関数 $f(x)=-\frac{1}{2}x^2+2x-\frac{1}{2}$ と $a_1=2$，$a_{n+1}=f(a_n)$ $(n\geqq 1)$ によって定義される数列 $\{a_n\}$ について，次の各問いに答えよ．

(1) a_3 を求めよ．

(2) $x_1<x_2<2$ のとき，$f(x_1)<f(x_2)$ が成り立つことを示せ．

(3) $n=3,\ 4,\ \cdots$ に対し，$a_n<1+\frac{2}{n}$ が成り立つことを示せ．

(4) $\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ．

【答】 (1) $a_3=\frac{11}{8}$　(2) 略　(3) 略　(4) $\lim_{n\to\infty} a_n=1$

【解説】

(1)

$$a_2=f(a_1)$$
$$=-\frac{1}{2}{a_1}^2+2a_1-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$$
$$a_3=f(a_2)$$
$$=-\frac{1}{2}{a_2}^2+2a_2-\frac{1}{2}=\mathbf{\frac{11}{8}}$$

(2) $f(x)=-\frac{1}{2}(x-2)^2+\frac{3}{2}$ より $f(x)$ は $x\leqq 2$ において単調増加であるので

$$x_1<x_2<2 \iff f(x_1)<f(x_2)<f(2)$$

(3) $a_3=\frac{11}{8}=1+\frac{3}{8}<1+\frac{2}{3}$ より $n=3$ のとき

$$a_n<1+\frac{2}{n} \quad \cdots\cdots①$$

が成り立つので，$n\geqq 3$ のとき①の成立を仮定すると，$a_n<1+\frac{2}{n}<2$ より

$$a_{n+1}-\left(1+\frac{2}{n+1}\right)$$
$$=f(a_n)-\left(1+\frac{2}{n+1}\right)$$
$$<f\left(1+\frac{2}{n}\right)-\left(1+\frac{2}{n+1}\right)$$
$$=-\frac{1}{2}\left(-1+\frac{2}{n}\right)^2+\frac{3}{2}-\left(1+\frac{2}{n+1}\right)$$
$$=\frac{-2}{n^2(n+1)}<0$$
$$\therefore\quad a_{n+1}<1+\frac{2}{n+1}$$

が成り立ち，帰納的に①は示された．

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

(4)

$$f(x)-1=-\frac{1}{2}(x-1)(x-3),\quad a_1=2$$

と(3)により帰納的に

$$1<a_n<1+\frac{2}{n}$$

$$\iff \quad 0<a_n-1<\frac{2}{n}$$

が成り立つが，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}=0$$

より

$$\lim_{n\to\infty}(a_n-1)=0 \qquad \therefore \quad \boldsymbol{\lim_{n\to\infty}a_n=1}$$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。